LE FUNZIONI

Dati due insiemi A e B, si dice corrispondenza se c'è una legge che unisce questi due insiemi per cui un elemento di A corrisponde a un elemento di B. In questi primi esempi utilizzeremo maggiormente la rappresentati con i diagrammi di Eulero-Venn.

Definizione di Funzione:

Sia $f: A \to B$ una corrispondenza, *f* si dice funzione se

$$\forall a \in A,\ \exists!\ b \in B \text{ t.c. } f(a) = b$$

dove l'insieme **A** si chiama DOMINIO della funzione, mentre **B** è il CODOMINIO.

Esempio: Una Corrispondenza che **non** è una funzione

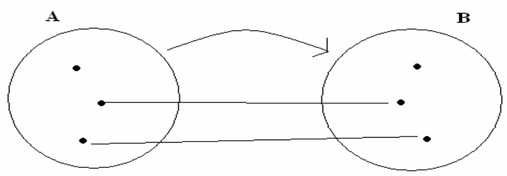


Figura 1

Questa non è una funzione perché c'è un elemento di A che non ha corrispondenti in B, quindi viene meno il $\forall a \in A$, ...

Altro esempio:

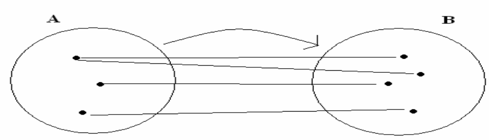


Figura 2

Questa non è una funzione perché al contrario dell'esempio di prima, c'è un elemento che ha fin troppi corrispondenti in B, quindi viene meno la parte della definizione che dice $\exists\ !\ b \in B$ ....

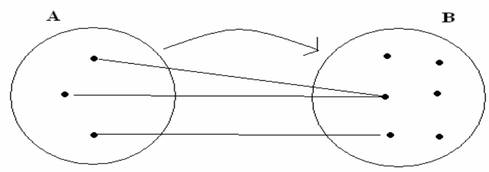


Figura 3

Quella rappresentata in figura, invece, è una funzione, infatti si potrà facilmente osservare che tutti gli elementi di A soddisfano, senza eccezioni, la definizione prima data.

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI

2) $f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$ (anche se questa scrittura di per se non significa nulla, se non è specificata una funzione specifica, scrivere quindi solo $x \mapsto f(x)$ non ha alcun senso. Ogni volta, infatti, ci sarà sempre scritta la legge con cui la funzione associa gli elementi del dominio a quelli del codominio)

Esempio: $f :. A \to B$

$x \mapsto 3x^2 + 1$

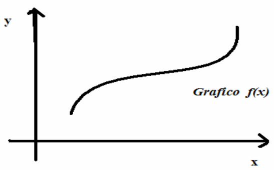
questa funzione associa a ciascun elemento, numerico, di A il triplo del quadrato incrementato di 1;

3) Rappresentazione esplicita

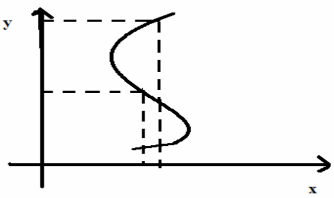
es: $f(x) = 3x^2 + 1$ $\quad x \in \mathbf{R}$

es: $y = 3x^2 + 1$ $\quad x \in \mathbf{R}$

4) Rappresentazione Grafica



Ma poniamoci ora un'altra domanda: come facciamo a distinguere se un disegno rappresenta o meno il grafico di una funzione?



Quello rappresentato qui affianco non può essere il grafico di una funzione perché considerando ***X*** il dominio e ***Y*** il codominio si noterà che esistono molti elementi ***x*** che hanno più di un corrispondente, in contrasto con la definizione, e rappresentando una situazione analoga quella della figura 2

Regola di dimostrazione di un'affermazione (valida per i teoremi in generale)

Esempio di un teorema: L'affermazione A è vera

1) **se vogliamo CONFUTARE** quanto detto nel teorema, ci basta trovare un esempio che ne confermi l'inesattezza.

Es: Tutti i numeri pari elevati al cubo sono numeri dispari

$n^3 = \text{dispari} \quad (n=\text{pari})$

$4^3 = 64$

(64 è un numero pari quindi l'affermazione è falsa)

2) **se vogliamo CONFERMARE** l'affermazione del teorema, dobbiamo procedere con una dimostrazione senza casi particolari ($\forall a$), che valga sempre insomma. Non potremo quindi utilizzare degli esempi che confortino quanto da noi semmai intuito, ma dovremmo procedere, utilizzando le definizioni o altri teoremi già dimostrati, sempre per casi generali, lasciando quindi le incognite e mai i numeri di esempi particolari.

Definizione di FUNZIONE INIETTIVA

Sia $f : A \to B$ una funzione, essa si dice INIETTIVA se:

$$\forall\ a_1 \neq a_2 \text{ con } a_1, a_2 \in A \quad \Rightarrow \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

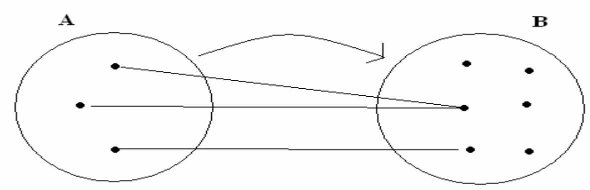
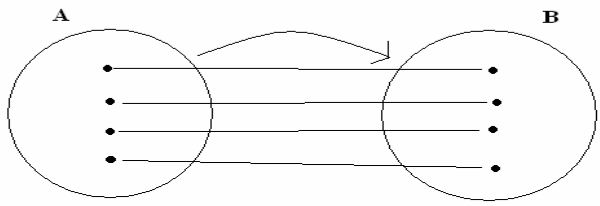


figura 4

Questa di figura 4 è un esempio di funzione NON INIETTIVA, infatti due diversi punti del dominio, hanno uno stesso corrispondente nel codominio. Ovviamente ci basti trovare questa situazione per anche soli due punti, per dedurre che la funzione non è iniettiva.



Questa altra funzione invece è INIETTIVA, infatti si potrà facilmente vedere che tutti gli elementi del dominio soddisfano la definizione di infettività.

Esempio algebrico:

Sia data la funzione $y = x^2 - 3$

Se $a_1 = -2$ $f(a_1) = 1$
Se $a_2 = +2$ $f(a_2) = 1$

La funzione non è iniettiva, perché comunque presi questi due valori, di a_1 ed a_2 i loro corrispondenti risultano invece uguali tra di loro,

$$f(a_1) = f(a_2)$$

quindi, con questo esempio, siamo riusciti a dimostrare che la funzione $y = x^2 - 3$ non è iniettiva.