DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO per $x \to \infty$
Si definisce LIMITE FINITO l della funzione $f(x)$ per $x \to \infty$ se:

$\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere $\exists$ $x_0(\varepsilon)$ t.c $x > x_0$ $\quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Osservazione 1
Nell'andare a calcolare il limite $x \to 0$ andiamo di fatto a vedere l'andamento della funzione quando **x** cresce indefinitivamente. Se tale limite è finito significa che al crescere di x la funzione si avvicinerà sempre più al valore l.

Esempio 1

$$\lim_{x \to 8}(\frac{1}{x} + 3) = 3$$

dove quindi $l = 3$

prendiamo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$ Sostituendo alla formula $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

i valori di l e di ε si ottiene $3 - \frac{1}{100} < \frac{1}{x} + 3 < 3 + \frac{1}{100}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 3 > 3 - \frac{1}{100} \\ \frac{1}{x+3} < 3 + \frac{1}{100} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} > -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{100} \end{cases} \quad \begin{cases} x < -100 \\ x > 100 \end{cases} \quad S: x_0 = 100$$

La soluzione $x > +100$ è stata considerata perché la funzione tende a $+\infty$, mentre il valore $x < -100$ si otterrebbe se x tendesse a $-\infty$.

Osservazione 2
La definizione è soddisfatta perché è stato trovato un valore di x (in questo caso $x > +100$) tale che per $x > x_o$ vale $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Esempio 2

$$\lim_{x \to 8}\left(\frac{1}{x} + 3\right) = 5$$

$l = 5$

prendiamo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$

otterremo

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 3 > 5 - \frac{1}{100} \\ \frac{1}{x} + 3 < 5 + \frac{1}{100} \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} \frac{1}{x} > 2 - \frac{1}{100} \\ \frac{1}{x} > 2 + \frac{1}{100} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{199}{100} \\ \frac{1}{x} > \frac{201}{100} \end{cases}$$

invertendo ambo i membri $\begin{cases} x < \frac{100}{199} \\ x > \frac{100}{201} \end{cases}$

la soluzione trovata sarebbe $S: \frac{100}{201} < x < \frac{100}{199}$

cioè un intorno all'incirca del valore 5, in netta contraddizione con il fatto che la $x \to \infty$. La contraddizione è nata dal fatto questo limite in realtà non tende a 5 bensì a 3.

Mentre nell'esercizio precedente avevamo ottenuto x>100 in pieno accordo con la definizione con il fatto che *x* crescente ($x \to \infty$) in questo esercizio invece il limite l sarebbe stato solo in un insieme soluzione $S: \frac{100}{199} < x < \frac{100}{201}$ in netta contraddizione con quanto richiesto in cui x deve crescere indefinitivamente.

Quindi il valore $l = 5$ era errato, mentre rifacendo i conti ponendo *l=3* vedremmo che la definizione sarebbe confermata per qualsiasi scelta di ε