# *CONCETTO DI LIMITE.*

Esempio 1

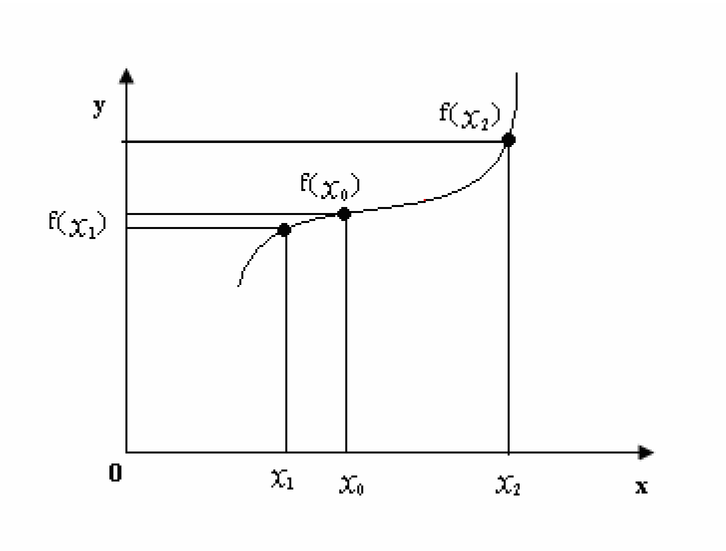


***Figura 1***

**Simbolismo utilizzato:**
$\lim f(x)=\boldsymbol{l}$
$x \to x_0$

**COME SI LEGGE:**
limite per $x$ che tende ad $x_0$ di f(x) è uguale a ***l***, dove ***l*** è il valore del limite
***Fare il limite per x che tende ad $x_0$ di una funzione significa voler vedere l'andamento di quella funzione intorno a f( $x_0$ ). Nel calcolo del limite intorno ad un punto, la funzione può anche permettersi di non essere definita in quel punto. La funzione deve esistere però nell'intorno, altrimenti il limite non avrebbe senso.***

Esempio 2

$$f(x)=\frac{x}{x-2}$$

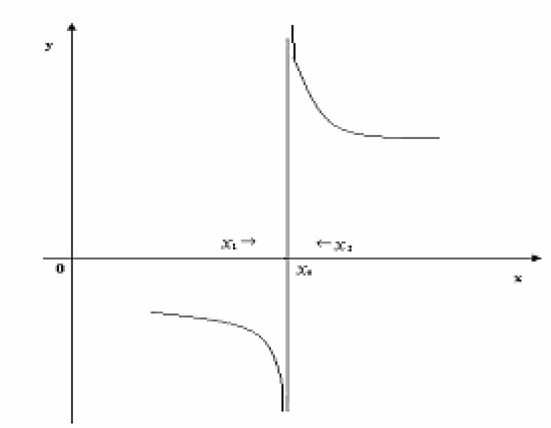


***Figura 2***

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Nel calcolo del limite $\mathbf{x} \to x_0$ non è necessario che la funzione esista in $x_0$.
L'esempio 2 mostra proprio una situazione di questo tipo.

DEFINIZIONE:

Il limite per **x** che tende ad $x_0$ di una funzione **f(x)** è uguale ad ***l*** se:
$\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. se x$\in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ accade che

$$l - \delta < f(x) < l + \varepsilon$$

COME SI LEGGE:

Per ogni epslon maggiore di zero, piccolo a piacere esiste un delta dipendente da epslon maggiore di zero tale che se *x* appartiene a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ accade che *f(x)* è compreso tra $l - \delta$ ed $l + \varepsilon$.

GRAFICO:

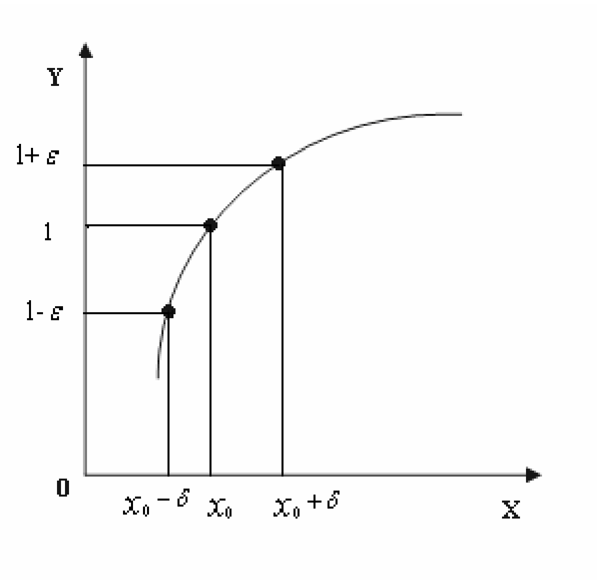


***Figura 3***

ESEMPIO 3

*Applicando la definizione.*
Verificare che:

$$\lim_{x \to +2}(x+5) = +7$$

posto $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ e sapendo che ***l***=+7

verifichiamo che $\boldsymbol{l} - \varepsilon < f(x) < \boldsymbol{l} + \varepsilon$

ovvero: $7 - \dfrac{1}{10} < x+5 < 7 + \dfrac{1}{10}$

da qui è possibile scrivere il sistema:

$$\begin{cases} x+5>7-\dfrac{1}{10} \\ x+5<7+\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

da cui segue che:

$$\begin{cases} x>2-\dfrac{1}{10} \\ x<2+\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

se può facilmente vedere che abbiamo così ottenuto un intorno di 2, ovvero:

$$2-\frac{1}{10}<x<2+\frac{1}{10}$$

in pieno accordo con quanto scritto nel limite, e cioè $x \to 2$ .

## ESEMPIO 4

*Applicando la definizione.*

Verificare che $\lim_{x\to+2}(x+5)=10$

Scelto anche qui $\varepsilon=\frac{1}{10}$ e sapendo che ***l***=10

avremo: l-$\varepsilon$ <f(x)< l+$\varepsilon$

da cui sostituendo:

$10-\frac{1}{10}$ <x+5< $10+\frac{1}{10}$

$$\begin{cases} x+5>10-\dfrac{1}{10} \\ x+5<10+\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

da cui risulta x>5-$\frac{1}{10}$ ed x< 5+$\frac{1}{10}$, ovvero un intorno di 5. Ma nel limite, come visto invece nell'esempio 3, era ammissibile un intorno di 2 mentre un intorno di 5 è palesemente errato. L'errore è stato generato dal fatto che il valore del limite ***l***=10 era errato.

**Osservazione importante**

Da questi ultimi due esempi possiamo intuire una proprietà che invece vale in generale, e cioè che quando il limite di una funzione esiste, il valore è **unico**.