DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITA' DEL LIMITE

Premessa:
DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

- Ipotesi $\Rightarrow$ Tesi
- Per assurdo nego la tesi $\Rightarrow$ Ipotesi dell'assurdo
- Se la tesi è vera si giunge ad una contraddizione $\Rightarrow$ Assurdo

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Ipotesi $\rightarrow \lim_{x \to c} f(x)$

Tesi $\rightarrow$ il limite l è unico

Per assurdo si nega la tesi,secondo cui il limite è unico,supponendo il caso in cui esistano due differenti limiti *l* e *l'*.

$$l \neq l' \quad \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$\frac{\varepsilon}{2}$ è un valore positivo arbitrariamente piccolo per il quale valga l'ipotesi dell'assurdo:

1. $$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi vale anche l'ipotesi:

2. $$|f(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Dato che i due limiti sono diversi tra loro,è possibile che la loro differenza sia maggiore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Quindi il valore $\frac{\varepsilon}{2}$ deve soddisfare:

3. $$l \neq l' \Rightarrow |l'-l| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Sommando membro a membro le disegualianze 1 e 2, si ottiene:

$$|f(x) - l| + |f(x) - l'| < \varepsilon$$

$$f(x) - l - f(x) + l' < \varepsilon$$

A seguito delle eventuali semplificazioni risulta:

$$l' - l < \varepsilon$$

Si è giunti ad una contraddizione con l'ipotesi 3, ad un assurdo, in quanto il risultato appena ottenuto è diverso dall'ipotesi

$$l' - l < \varepsilon \neq l' - l > \frac{\varepsilon}{2}$$

L'assurdo nasce dall'aver supposto che esistano due limiti distinti $l \neq l'$. Applicando il principio del terzo escluso, *l'* deve essere uguale a *l*. Quindi il limite è unico.