

Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{da cui si può facilmente dedurre che:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{da cui generalizzando avremo:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{da cui quando } a=e \text{ otteniamo:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Esempio di calcolo con $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ **razionalizzazione del numeratore**
(pag. 151)

INFINITESIMO E LORO CONFRONTO (PAG. 153)

Una funzione si dice infinitesima per $x \rightarrow c$ se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

Infinitesimo di ordine superiore

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ diremo che $f(x)$ è infinitesimo di ordine **superiore** a $g(x)$. Di fatto è

come se dicessimo che entrambe le funzioni tendono a zero, ma la $f(x)$ tende a zero più rapidamente rispetto alla $g(x)$ quando $x \rightarrow c$.

È ovviamente complicato fare una classifica delle funzioni che tendono a zero più rapidamente, ma volendone confrontare alcune potremmo dire un possibile ordine, tra alcune funzioni, potrebbe essere il seguente:

$e^{-\frac{1}{x}} > x^2 > \log(1+x) \approx x \approx \sin x$ (con il simbolo \approx intendiamo che il log, la x ed il seno hanno lo stesso ordine di infinitesimo.)

Infinitesimo di ordine inferiore

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ diremo che $f(x)$ è infinitesimo di ordine **inferiore** a $g(x)$. Di fatto è come se dicessimo che entrambe le funzioni tendono a zero, ma la $g(x)$ tende a zero più rapidamente rispetto alla $f(x)$ quando $x \rightarrow c$.

Infinitesimo di dello stesso ordine

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ con $l \neq 0$ diremo che $f(x)$ è infinitesimo dello **stesso ordine** a $g(x)$. Di fatto è come se dicessimo che entrambe le funzioni tendono a zero, e con la stessa rapidità quando $x \rightarrow c$.

Ordine di infinitesimo

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ con $l \neq 0$ e sapendo che entrambi le funzioni tendono a zero,

diremo che $f(x)$ è **infinitesimo di ordine α** rispetto a $g(x)$.

Nella pratica, se non diversamente specificato, si utilizzano degli infinitesimi campioni, che sono:

$$g(x) = x \quad \text{se } x \rightarrow 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \rightarrow +\infty$$

$$g(x) = x - c \quad \text{se } x \rightarrow c$$

Di qui ad esempio potremmo dire che essendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(x)^1} = 1, \quad f(x) = \sin x \quad \text{è un infinitesimo di primo ordine.}$$

Mentre ad esempio essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ è infinitesimo di secondo ordine.

INFINITI E LORO CONFRONTO (PAG. 158)

Una funzione si dice infinita per $x \rightarrow c$ se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$

Infinito di ordine superiore

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ diremo che $f(x)$ è **infinito di ordine superiore** a $g(x)$. Di fatto è come se

dicessimo che entrambe le funzioni tendono ad infinito, ma la $f(x)$ tende ad infinito più rapidamente rispetto alla $g(x)$ quando $x \rightarrow c$.

Infinito di ordine inferiore

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ diremo che $f(x)$ è **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$. Di fatto è come se

dicessimo che entrambe le funzioni tendono ad infinito, ma la $g(x)$ tende ad infinito più rapidamente rispetto alla $f(x)$ quando $x \rightarrow c$.

Infinitesimo di dello stesso ordine

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ con $l \neq 0$ diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**.

Di fatto è come se dicessimo che entrambe le funzioni tendono ad infinito con la stessa rapidamente quando $x \rightarrow c$.

Ordine di infinito

Detto $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ con $l \neq 0$ e sapendo che entrambi le funzioni tendono ad infinito,

diremo che $f(x)$ è infinito di **ordine** α rispetto a $g(x)$.

Nella pratica, se no diversamente specificato, si utilizzano degli infinitesimi campioni, che sono:

$$g(x) = x \quad \text{se } x \rightarrow \infty$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \rightarrow 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x-c} \quad \text{se } x \rightarrow c$$