

**LIMITE DI UNA SOMMA**

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Teorema 1

Il limite di una somma di due funzioni è dato dalla somma dei limiti.

Esempio: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + \log x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} \log x$

LIMITE DI UN PRODOTTO

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Teorema 2

Il limite del prodotto di due funzioni è dato dal prodotto dei limiti.

Esempio 1: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 \cdot \log x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \log x$

LIMITE DEL QUOZIENTE

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

Teorema 3

Il limite di un quoziente di due funzioni è dato dal quoziente del limite.

Esempio 2: se dovessimo calcolare $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{\log x}$ avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{\log x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2}{\lim_{x \rightarrow 3} \log x}$$

CALCOLO DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE INTERA.

Teorema 4

Nel calcolo di un limite andremo a sostituire al posto della x il valore di c . A volte però questa sostituzione ci porterà a quelli che si



chiamano “casi di indeterminazione”. In queste situazioni dovremmo svolgere il limite con degli artifici.

$$\text{Esempio di calcolo: } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 5) = (1)^2 + (3) \cdot (1) + 5 = 9$$

CASI DI INDETERMINAZIONE

Si chiamano di indeterminazione, perché il risultato non è sempre lo stesso, ovvero, per alcuni limiti quando capiterà un caso di indeterminazione il limite potrebbe fare un certo valore. Altre volte, pur capitando lo stesso caso di indeterminazione, il valore potrebbe essere diverso. Ecco quindi il perché dell'indeterminazione, cioè il non poter in anticipo dire quanto sarà il risultato.

Prima di esporli, riassumiamo le seguenti proprietà:

Algebra degli infinito:

$$1) \infty + n = \infty$$

$$\infty - n = \infty$$

$$2) \infty \cdot k = +\infty \quad \text{se } k > 0$$

$$\infty \cdot k = -\infty \quad \text{se } k < 0$$

$$3) (\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$4) \frac{\infty}{n} = \infty \quad \text{con } n \text{ numero reale qualunque}$$

$$5) \frac{n}{\infty} = 0 \quad \text{con } n \text{ numero reale qualunque}$$

$$6) \infty^n = \infty \quad \text{con } n \text{ numero naturale}$$

$$7) \infty^\infty = \infty$$

$$8) n^\infty = \infty \quad \text{per } n > 1$$

$$9) n^\infty = 0 \quad \text{per } 0 < n < 1$$

$$10) n - \infty = -\infty \quad (\text{anche se questo non è molto diverso dal (1)})$$

Algebra dello zero

$$11) \frac{0}{n} = 0 \quad \text{con } n \text{ numero reale}$$

$$12) \frac{n}{0} = \infty \quad \text{con } n \text{ numero reale}$$

$$13) 0 \cdot n = 0 \quad \text{con } n \text{ numero reale}$$

$$14) n^0 = 1 \quad \text{con } n \text{ numero reale}$$

$$15) 0^n = 0 \quad \text{con } n \text{ numero naturale}$$

$$16) n - n = 0 \quad \text{con } n \text{ numero reale}$$

**CASI DI INDETERMINAZIONE**

1° caso) $\frac{\infty}{\infty}$

per la(4) dovremmo dedurre che $\frac{\infty}{\infty} = \infty$

per la(5) dovremmo dedurre che $\frac{\infty}{\infty} = 0$

quale è corretto? Nessuno dei due, è appunto una indeterminazione, perché a volte il limite che si presenterà così varrà 0, altre volte varrà ∞ ed altre volte ancora varrà un valore l finito.

2° caso: $\frac{0}{0}$

per la(11) dovremmo dedurre che $\frac{0}{0} = 0$

per la(12) dovremmo dedurre che $\frac{0}{0} = \infty$

indeterminazione, perché stesse considerazioni fatte prima

3° caso: $0 \bullet \infty$

per la(13) dovremmo dedurre che $0 \bullet \infty = 0$

per la(2) dovremmo dedurre che $0 \bullet \infty = \infty$
quindi l'indeterminazione.

4° caso: $\infty^0 = 1$

per la(14) dovremmo dedurre che $\infty^0 = 1$

per la(6) dovremmo dedurre che $\infty^0 = \infty$
quindi l'indeterminazione.

5° caso: 0^0

per la(14) dovremmo dedurre che $0^0 = 1$

per la(15) dovremmo dedurre che $0^0 = 0$



*E' utile elencare, casi che al contrario **non** sono di indeterminazione, e che però potrebbero essere scambiati, erroneamente, per casi di indeterminazione.*

CASI DI NON INDETERMINAZIONE

$$1^{\circ} \text{ caso: } \infty \cdot \infty = \infty$$

$$2^{\circ} \text{ caso: } \frac{\infty}{0} = \infty \cdot \left(\frac{1}{0}\right)^{\infty} = \infty$$

$$3^{\circ} \text{ caso: } \frac{0}{\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

Proviamo ora ad effettuare qualche calcolo, dove troveremo per l'appunto uno dei casi di indeterminazione.

POLINOMIALE FRATTA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^3} = \frac{\infty^2 + \infty}{\infty^3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{x \cdot x^2} =$$

dopo aver messo in evidenza la x , semplificando si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} . \text{ provando ora a ricalcolare il limite, si vede facilmente che}$$

l'indeterminazione non si è ancora tolta. Infatti, forse è necessario mettere in evidenza non solo x , ma x^2 .

Avremo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x})}{x^2 \cdot x} \Rightarrow \text{semplificando: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})}{\cdot x} \frac{1+0}{\infty} = 0 \quad \text{siamo così}$$

riusciti a risolvere l'indeterminazione, ottenendo il risultato del limite.

Possiamo quindi enunciare, una regola pratica per situazioni tipo questa:

Regola pratica per polinomiali fratte, con $x \rightarrow \infty$:

Se abbiamo un limite per $x \rightarrow \infty$ di una polinomiale fratta del tipo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a_1x^m + b_1x^{m-1} + \dots}, \text{ ed ovviamente se appare un caso di indeterminazione,}$$

basterà mettere in evidenza, sia a numeratore che a denominatore, il massimo esponente del numeratore (o del denominatore), per poter così semplificare quel massimo esponente. Così facendo si toglierà l'indeterminazione.