

**ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO - SCIENTIFICO
TECNOLOGICO**

2010

Corso Sperimentale – Progetto Brocca

Tema di Fisica

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle *elettroni*.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

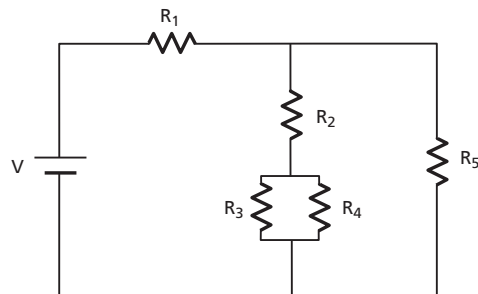
$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Secondo tema

Alla fine del Settecento il medico bolognese Galvani propose una sua interpretazione sull'origine della corrente elettrica. L'ipotesi di Galvani non fu, però, accettata dal fisico Alessandro Volta, dell'Università di Pavia, che

propose un'ipotesi alternativa e costruì nel 1800 il primo generatore elettrico in corrente continua: la cosiddetta pila di Volta. Nell'Ottocento seguirono poi le ricerche dei fisici tedeschi Ohm e Kirchhoff che scoprirono le leggi dei circuiti elettrici. Il candidato:

- spieghi il principio di funzionamento della pila di Volta;
- spieghi il significato di circuito elettrico e si soffermi sulla natura e le unità di misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua;
- descriva teoricamente e graficamente come si collocano in un circuito elettrico gli strumenti di misura amperometro e voltmetro, con le necessarie considerazioni riguardanti la resistenza interna di questi strumenti confrontata con le resistenze presenti nel circuito;
- spieghi perché in ogni misura è necessario scegliere nello strumento la portata minima possibile;
- dato il seguente circuito in corrente continua, alimentato da una pila da 4,5 V, calcoli:



- l'intensità della corrente erogata dalla pila;
- la d.d.p. ai capi di R_1 e di R_3 ;
- l'energia dissipata, per effetto Joule, da R_1 e da R_3 in 2 secondi.

I valori delle resistenze elettriche sono: $R_1 = 1,5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$

La soluzione

Primo tema

Ipotesi di de Broglie

In analogia al comportamento duale (ondulatorio e corpuscolare) mostrato dalla luce, nel 1923-24 Louis de Broglie propose che a ogni particella materiale, con quantità di moto \vec{p} , dovesse essere associata un'onda di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

dove h è la costante di Planck. La λ così trovata è detta "lunghezza d'onda di de Broglie" della particella.

L'ipotesi di de Broglie è fondamentale perché aprì la strada ai successivi sviluppi della meccanica ondulatoria. In particolare, essa:

- **ingloba la relazione di Einstein** $E = hf$ per i fotoni. Infatti, per i fotoni vale $p = E/c$ e quindi per essi si ha $\lambda = h/p = h/(E/c) = hc/E$; da questa espressione si ottiene, allora,

$$E = h \frac{c}{\lambda} = hf.$$

- **spiega la stabilità dell'atomo di Bohr**: infatti, secondo l'interpretazione ondulatoria non bisogna modellizzare l'elettrone dell'atomo di idrogeno come una particella che segue un'orbita circolare, ma come un'onda stazionaria presente attorno al nucleo dell'atomo. Essendo stazionaria, l'onda si mantiene invariata per un tempo indefinito.
- **giustifica la condizione di quantizzazione di Bohr**: per essere stazionaria, l'onda si deve richiudere su se stessa, e ciò è possibile soltanto se la lunghezza $2\pi r_n$ dell'orbita di Bohr è un multiplo intero della lunghezza d'onda dell'elettrone:

$$2\pi r_n = n \frac{h}{p_n} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_n p_n = nh$$

che è proprio la condizione di quantizzazione di Bohr.

La meccanica ondulatoria

La meccanica ondulatoria è una particolare formalizzazione della meccanica quantistica presentata nel 1926 da Erwin Schrödinger. Secondo tale teoria, ogni sistema fisico microscopico è descritto da una funzione complessa delle tre coordinate spaziali x, y, z e dell'istante di tempo t , detta *funzione d'onda* $\Psi(x, y, z, t)$.

Se consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo dt centrato sull'istante t e un volume infinitesimo dV centrato nel punto $P(x, y, z)$, la quantità

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 dV dt$$

fornisce la probabilità che una misura porti a trovare l'elettrone durante l'intervallo dt nel volumetto dV . (Gli orbitali che si incontrano nel programma di Chimica sono funzioni d'onda degli elettroni negli atomi.)

Secondo la meccanica ondulatoria, le probabilità calcolate a partire dalla formula precedente sono le informazioni più dettagliate che è in linea di principio possibile ottenere sul sistema fisico quantistico in esame.

La meccanica ondulatoria abbandona quindi il determinismo che era tipico della fisica classica: in generale, bisogna rinunciare all'idea di prevedere in dettaglio l'evoluzione di un sistema fisico o il risultato di una misura sperimentale. Invece, la teoria permette di calcolare con quale probabilità avranno luogo le possibili evoluzioni di uno stesso stato fisico, oppure con quali probabilità, eseguendo un esperimento, otterremo uno dei risultati possibili piuttosto che un altro.

Un'altra differenza tra la meccanica classica e quella quantistica è espressa dal **principio di indeterminazione di Heisenberg**: nella meccanica classica, in linea di principio è possibile conoscere contemporaneamente e con infinita precisione la posizione e la quantità di moto di una particella; nella meccanica quantistica, invece, l'indeterminazione Δx sulla posizione di una particella e l'indeterminazione Δp sulla sua quantità di moto sono legate dalla relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Così, se si fa tendere a zero l'indeterminazione su una delle due grandezze x o p , l'indeterminazione sull'altra tende all'infinito.

Tra le altre cose, il principio di indeterminazione fornisce una diversa spiegazione del fatto che l'elettrone dell'atomo di idrogeno non può "collapsare" sul nucleo: in effetti, un elettrone fermo sul nucleo di un atomo avrebbe un'indeterminazione molto piccola (dell'ordine del diametro del nucleo) sulla posizione e contemporaneamente, essendo fermo, un'indeterminazione nulla sulla quantità di moto. Ma una tale situazione non può avvenire perché è in contraddizione con il principio di Heisenberg.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg si esprime anche nella forma

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Questa formula ha due possibili interpretazioni:

- la precisione intrinseca ΔE su una misura di energia dipende dalla durata della misura stessa.
- per analizzare fenomeni che avvengono durante intervalli di tempo molto brevi bisogna impiegare energie corrispondentemente grandi.

Dualismo onda-corpuscolo

Gli esperimenti sull'effetto fotoelettrico, realizzati nel 1902 da Philipp Lenard, erano incompatibili con l'elettromagnetismo classico a causa della presenza di una frequenza di soglia f_{min} , al di sotto della quale l'effetto fotoelettrico non avviene.

Dal punto di vista classico ciò è incomprensibile perché l'irradiazione di una superficie, dovuto a un'onda elettromagnetica, è dato dalla formula

$$E_e = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

dove E_0 è l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda. Quindi, in modo del tutto indipendente dalla frequenza dell'onda, dovrebbe essere possibile convogliare su una superficie una potenza arbitrariamente grande, aumentando il valore di E_0 .

La spiegazione di questo apparente paradosso fu fornita da Albert Einstein nel 1905, quando egli propose che la luce possa essere interpretata come un insieme di quanti di energia (più tardi chiamati "fotoni"), ciascuno con energia $E = hf$ e quantità di moto $p = E/c$.

Negli esperimenti di ottica (in particolare quelli di interferenza e diffrazione) la luce si comporta come un'onda; secondo la formalizzazione di Maxwell la luce è un'onda elettromagnetica; ma Einstein mostra come la stessa luce abbia comportamenti di tipo corpuscolare.

Quindi, *la luce, a seconda delle condizioni sperimentali, può essere descritta in modo alternativo dal modello ondulatorio o da quello corpuscolare.* È questo il **dualismo onda-corpuscolo** della luce, confermato nel 1923 dall'esperimento di Compton, in cui la variazione di lunghezza d'onda di raggi X che incidono su un bersaglio di grafite può essere interpretata come dovuta all'urto di *un* elettrone della grafite con *un* fotone della radiazione X incidente.

Tutto ciò è alla base della riflessione di Louis de Broglie che lo portò, come è spiegato in precedenza, a ipotizzare un'analogo dualismo per le particelle materiali. Un elettrone, per esempio, si comporta come una particella nell'esperimento di J. J. Thomson e in quello di Millikan (per fare solo due esempi), ma ha un comportamento ondulatorio in altri casi, per esempio quando si trova legato in un atomo.

Ricordiamo che il dualismo onda-corpuscolo dell'elettrone è confermato in modo diretto da un esperimento compiuto nel 1927 da C. J. Davisson e L. H. Germer, in cui un fascio di elettroni (con lunghezza d'onda di de Broglie λ), fatto incidere su un bersaglio metallico, mostra una figura di interferenza del tutto analogo a quello generato da raggi X della stessa lunghezza d'onda. È quindi confermato che gli elettroni, in particolari condizioni sperimentali, mostrano un comportamento ondulatorio.

Il problema

Dobbiamo premettere un'osservazione: il testo della prova prescrive che il candidato "presti particolare attenzione al corretto uso delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici." Tutto bene, se poi la prova stessa non fornisce la maggior parte dei dati con una sola cifra significativa. Il candidato sarebbe allora

costretto a fare altrettanto, e i risultati perderebbero spesso significato. Non possiamo fare a meno di interrogarci sulla ragione di un modo di procedere così palesemente incoerente. Nel seguito indichiamo tutti i risultati con tre cifre significative.

La velocità di propagazione della luce che si propaga nell'aria con lunghezza d'onda λ e periodo $T = 1/f$ è praticamente identica alla velocità c della luce nel vuoto, per cui si ha

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (1)$$

Questa relazione può essere utilizzata per ricavare l'energia dei fotoni che incidono sulla placca fotosensibile, che è

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \times 3,00 \times 10^8 \text{m/s}}{5,00 \times 10^{-7} \text{m}} = 3,98 \times 10^{-19} \text{J}. \quad (2)$$

Il lavoro di estrazione della placca fotosensibile vale

$$W_e = 2,10 \text{eV} = 2,10 \text{eV} \times 1,60 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 3,36 \times 10^{-19} \text{J}. \quad (3)$$

Quindi l'energia cinetica massima degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico è

$$K_{max} = E - W_e = 3,98 \times 10^{-19} \text{J} - 3,36 \times 10^{-19} \text{J} = 6,2 \times 10^{-20} \text{J}. \quad (4)$$

Per trovare il corrispondente valore della quantità di moto massima p_{max} , senza fare troppi calcoli, è conveniente utilizzare l'identità

$$K_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m},$$

dove m è la massa dell'elettrone. Dall'equazione precedente possiamo infatti ricavare

$$p_{max} = \sqrt{2mK_{max}} = \sqrt{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \text{kg} \times 6,2 \times 10^{-20} \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}},$$

in modo da ottenere

$$p_{max} = 3,4 \times 10^{-25} \sqrt{\left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 3,4 \times 10^{-25} \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5)$$

Ora possiamo infine calcolare la minima lunghezza d'onda λ_{min} richiesta dal problema:

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{3,4 \times 10^{-25} \text{kg} \cdot \text{m/s}} = 2,0 \times 10^{-9} \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 2,0 \times 10^{-9} \text{m}.$$

Secondo tema

La pila di Volta

La prima legge dell'effetto Volta dice che tra due metalli A e B posti a contatto si instaura una differenza di potenziale pari alla differenza (presa nell'ordine inverso) dei rispettivi potenziali di estrazione.

Sulla base di essa si dimostra la legge dei contatti successivi, secondo cui la differenza di potenziale tra i due estremi di una catena di conduttori metallici è la stessa che si avrebbe se i due metalli ai capi opposti della catena fossero posti direttamente a contatto.

Con un esempio concreto, se tra due lastre (una di rame e una di zinco) si instaura una differenza di potenziale ΔV , unendo in catena rame-zinco-rame si ottiene agli estremi una tensione nulla, mentre ai capi di una catena rame-zinco-rame-zinco si misura ancora la stessa differenza di potenziale ΔV .

Questa situazione può essere modificata impilando (da cui il nome di *pila*) in modo alternato un disco del metallo A (per esempio rame), un disco del metallo B (per esempio zinco) e una pezzuola imbevuta di un materiale (come una soluzione acida) per il quale non vale la legge dei contatti successivi. In questo modo le differenze di potenziale esistenti in corrispondenza di ogni coppia di contatti metallici si sommano.

Dal punto di vista elettrochimico, all'elettrodo di zinco avviene una reazione di ossidazione in cui lo zinco si trasforma in ione Zn^{++} perdendo due elettroni, mentre all'elettrodo di rame avviene una reazione di riduzione in cui due elettroni provenienti dal rame si combinano con due ioni H^+ provenienti dalla soluzione acida, fornendo una molecola H_2 . In questo modo l'elettrodo di rame perde elettroni e si carica positivamente.

Il circuito elettrico

Si chiama *circuito elettrico* una catena non interrotta di conduttori, che contenga almeno un generatore. Le grandezze che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua sono:

- la *forza elettromotrice* f_{em} ai capi del generatore, definita come il rapporto

$$f_{em} = \frac{W_{ne}}{q}$$

tra il lavoro W_{ne} delle forze non elettrostatiche che, all'interno del generatore, muovono la carica positiva q dal polo negativo a quello positivo, e la carica q stessa.

Come si vede dalla definizione, la forza elettromotrice si misura in J/C . Questa unità, nel Sistema Internazionale si chiama volt (V).

- la *differenza di potenziale* ΔV tra due punti A e B , definita dalla formula

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q},$$

dove ΔU è la differenza tra l'energia potenziale della carica q nel punto B e quella che la stessa carica ha nel punto A .

Come nel caso della forza elettromotrice, l'unità di misura S.I. della differenza di potenziale è il volt.

- l'*intensità di corrente elettrica*, i , data dal rapporto

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

dove ΔQ è la carica che, nell'intervallo di tempo Δt , attraversa una sezione del conduttore in esame. Per correnti continue è sufficiente la definizione precedente; nel caso generale l'intensità istantanea di corrente è data dalla derivata della carica, fatta rispetto al tempo:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della corrente è il C/s , che prende il nome di ampere.

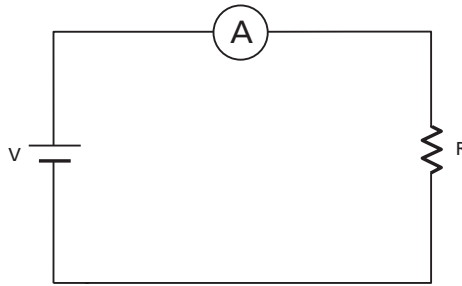
- la *resistenza elettrica* R di un conduttore ohmico, cioè di un conduttore la cui curva caratteristica ($\Delta V-i$) sia una retta passante per l'origine. In tal caso la resistenza è la costante di proporzionalità che lega la differenza di potenziale ai capi del conduttore con l'intensità della corrente presente in esso:

$$\Delta V = Ri.$$

Dalla formula precedente si vede che l'unità di misura S.I. della resistenza è il V/A , detto ohm (Ω).

Amperometro e voltmetro

L'amperometro deve essere attraversato dalla corrente che si vuole misurare e, quindi, va posto in serie al conduttore o resistore in cui si vuole misurare la corrente.

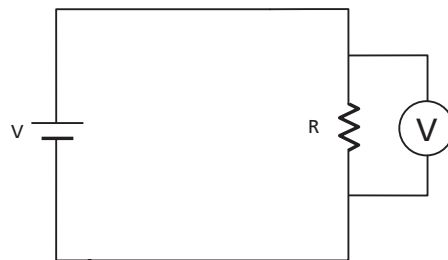


La resistenza equivalente R' del semplice schema precedente è data dalla somma della resistenza interna R_A dell'amperometro e della resistenza preesistente R :

$$R' = R_A + R.$$

Quindi l'inserzione dello strumento di misura ha modificato il sistema che si voleva esaminare. Per fare in modo che questa variazione sia la più piccola possibile (e, se si può, trascurabile) occorre che *la resistenza interna R_A dell'amperometro sia molto piccola rispetto alla resistenza R presente nel circuito.*

Invece il voltmetro deve essere in contatto con i due punti tra cui si vuole misurare la differenza di potenziale, e quindi deve essere posto in parallelo con gli altri conduttori che collegano tali punti.



Indicando con R_V la resistenza interna del voltmetro, il reciproco della resistenza equivalente dello schema nella figura precedente è

$$\frac{1}{R} \tag{6}$$

nel caso in cui non ci sia il voltmetro, mentre vale

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \tag{7}$$

se il voltmetro è presente. Per fare in modo che la quantità (7) sia il più possibile alla (6) occorre che il termine $1/R_V$ sia trascurabile rispetto a $1/R$. Quindi, l'inserzione del voltmetro non modifica in maniera apprezzabile il sistema da studiare se *la sua resistenza interna è molto grande rispetto alla resistenza R presente nel circuito.*

La portata dello strumento

Di regola, la *classe* di uno strumento di misura, cioè l'errore assoluto legato all'uso di tale strumento, è una percentuale della portata dello strumento stesso. Per esempio, in uno strumento di classe 3 l'errore strumentale è il 3% della portata (o valore di fondo scala).

Se la misura effettuata ha un valore \bar{x} , l'errore relativo sulla misura (che è un indice della precisione della misura stessa) è dato dal rapporto

$$e_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}},$$

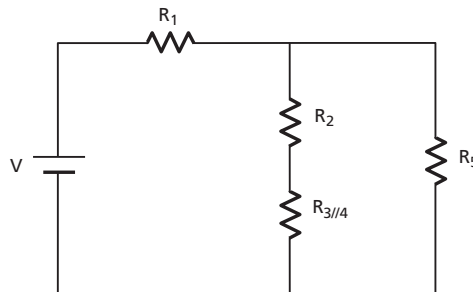
dove Δx è l'errore strumentale. Se vogliamo rendere l'errore relativo il più piccolo possibile, occorre minimizzare Δx . Essendo questo una frazione fissa della portata, Δx viene minimizzato scegliendo il valore di fondo scala più piccolo tra quelli che permettono di operare la misura \bar{x} .

Il problema

Si vedano le osservazioni sulle cifre significative relative al tema precedente. Nello schema circuitale che accompagna il testo le due resistenze R_3 e R_4 sono in parallelo tra loro, e sono quindi equivalenti alla resistenza

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{6,00 \Omega \times 3,00 \Omega}{9,00 \Omega} = 2,00 \Omega. \quad (8)$$

Ora, lo schema originale è equivalente a quello riportato sotto



In esso la resistenza R_{34} è in serie con R_2 , in modo che queste sono equivalenti alla resistenza

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 1,00 \Omega + 2,00 \Omega = 3,00 \Omega. \quad (9)$$

Giunti a questo punto, R_{234} è in parallelo con R_5 , e insieme a essa è equivalente a

$$R_{2345} = \frac{R_{234} R_5}{R_{234} + R_5} = \frac{3,00 \Omega \times 3,00 \Omega}{6,00 \Omega} = 1,50 \Omega. \quad (10)$$

Per finire, R_{2345} è in serie a R_1 , per cui la resistenza equivalente complessiva del circuito è

$$R_{eq} = R_1 + R_{2345} = 1,50 \Omega + 1,50 \Omega = 3,00 \Omega. \quad (11)$$

Grazie a questa informazione possiamo calcolare la corrente equivalente del circuito, che è quella erogata dalla pila (richiesta dal problema) e che indichiamo con i_1 perché è quella che attraversa la resistenza R_1 :

$$i_1 = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{4,50 \text{ V}}{3,00 \Omega} = 1,50 \text{ A}. \quad (12)$$

Di conseguenza, la differenza di potenziale ai capi di R_1 , richiesta dal problema, è

$$V_1 = R_1 i_1 = 1,50 \Omega \times 1,50 \text{ A} = 2,25 \text{ V}. \quad (13)$$

Ne consegue che anche la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_{234} (e anche di R_5) è

$$V_{234} = V_5 = V - V_1 = 4,50 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = 2,25 \text{ V}. \quad (14)$$

Ora possiamo calcolare l'intensità i_{234} della corrente che attraversa le resistenze R_2 e R_{34} :

$$i_{234} = \frac{V_{234}}{R_{234}} = \frac{2,25 \text{ V}}{3,00 \Omega} = 0,750 \text{ A}. \quad (15)$$

Infine, la differenza di potenziale ai capi di R_3 , richiesta dal problema, è

$$V_3 = R_{34} i_{234} = 2,00 \Omega \times 0,750 \text{ A} = 1,50 \text{ V}. \quad (16)$$

Con i dati del problema conviene esprimere la potenza dissipata su una resistenza R come

$$P = \frac{\Delta V^2}{R};$$

in questo modo, l'energia dissipata in un intervallo di tempo Δt sulla stessa resistenza è

$$W = P \Delta t = \frac{\Delta V^2}{R} \Delta t. \quad (17)$$

Specializzando la formula (17) ai casi delle resistenze R_1 e R_3 otteniamo le ultime due grandezze richieste:

- per l'energia dissipata dalla resistenza R_1 :

$$W_1 = \frac{V_1^2}{R_1} \Delta t = \frac{(2,25 \text{ V})^2}{1,50 \Omega} \times 2,00 \text{ s} = 6,75 \text{ J.}$$

- Per l'energia dissipata dalla resistenza R_3 :

$$W_3 = \frac{V_3^2}{R_3} \Delta t = \frac{(1,50 \text{ V})^2}{6,00 \Omega} \times 2,00 \text{ s} = 0,750 \text{ J.}$$